

Elektronentransport in nichtthermischen Edelgasplasmen

H. Lehrke und K. G. Müller

Universität Essen — Gesamthochschule

(Z. Naturforsch. **31a**, 915–923 [1976] ; eingegangen am 21. Mai 1976 **)

Transport of Electrons in Non-Thermal Noble Gas Plasma

For the transport of electrons in a non-thermal, weakly ionized plasma an analytical model and a detailed numerical calculation is presented. The following transport coefficients: mean energy, characteristic energy, mobility, diffusion coefficient, excitation and ionization coefficient for He, Ne, Ar, Kr, Xe are calculated in the region of reduced electric field $0.01 \text{ V/cm Torr} \leq E/p \leq 100 \text{ V/cm Torr}$. The parameters of the model are developed using the existing experimental and our numerical data. With increasing E/p the dominant energy loss of the electrons changes from elastic to inelastic collisions and here from constant to increasing effective excitation energy. Three model regions of E/p result, in which the transport coefficients can be described as a power of E/p . The data presented here provide a starting point for further investigations of similarity rules and models of non-thermal plasmas.

1. Einleitung

Schwach ionisierte Edelgasplasmen stellen den Prototyp eines nichtthermischen Plasmas dar; von hier läßt sich das Verständnis der nichtthermischen Plasmen entwickeln. Erschwerend für die Anwendung dieser Plasmen wirkt sich die ungenügende Kenntnis der Transportdaten der Elektronen aus.

Bei den vorliegenden experimentellen Ergebnissen^{1–8} fehlen weitgehend Messungen der charakteristischen Energie [s. a. Gl. (4)], des Diffusions- und Anregungskoeffizienten. Die theoretischen Rechnungen^{9–19} füllen diese Lücke nur unbefriedigend aus. Eine detaillierte Berechnung ist nur in einem kleinen Feldstärkebereich für Helium und Neon durchgeführt worden¹⁶. Häufig wird eine grobe Approximation der elastischen Querschnitte und der inelastischen Prozesse verwendet^{6, 13, 17, 18}.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, auf der Grundlage der Boltzmann-Gleichung den Elektronentransport in den Edelgasen numerisch und parallel hierzu durch die Entwicklung eines möglichst einfachen Modells analytisch zu berechnen. Das Modell geht aus von einer stark vereinfachten Beschreibung des Stoßes Elektron – Atom und soll in dem untersuchten Feldstärkebereich die Transportgrößen in einfacher analytischer Form als Funktion der reduzierten Feldstärke E/p liefern. Die offenen Parameter des Modells werden durch Vergleich mit den vorliegenden Meßwerten und den eigenen numerischen Ergebnissen bestimmt.

Wir unterscheiden zwei Feldstärkebereiche, den Bereich kleiner Feldstärke ($0,01 \text{ V/cm Torr} \leq E/p \leq 1 \text{ V/cm Torr}$) und den Bereich hoher Feldstärke ($1 \text{ V/cm} \leq E/p \leq 100 \text{ V/cm Torr}$). Die Zahlenangaben sind nur Orientierungswerte und im Detail von Gas zu Gas unterschiedlich. In unserem Modell findet im Bereich kleiner Feldstärke der wesentliche Energieverlust der Elektronen beim elastischen Stoß Elektron – Neutralteilchen statt, wobei die Neutralteilchen als ruhend betrachtet werden können; der Einfluß der inelastischen Stöße ist vernachlässigbar. Für die Elektronengeschwindigkeitsverteilung (EGV) ergibt sich eine Exponentialfunktion (elastisch bestimmte EGV). Im Bereich hoher Feldstärken findet der wesentliche Energieverlust beim inelastischen Stoß statt, der Energieverlust beim elastischen Stoß ist vernachlässigbar. Für den inelastischen Stoß verwenden wir die Näherung, daß alle Elektronen bei einer festen effektiven Anregungsenergie ε_{eff} inelastisch stoßen, wobei der Wert dieser Anregungsenergie noch von der Feldstärke abhängen kann. Dies führt zu einer abgeschnittenen Geschwindigkeitsverteilung (inelastisch bestimmte EGV).

Trotz dieser groben Beschreibung der Elektron – Atom-Stöße liefert unser Modell eine überraschend gute Darstellung des durch unsere numerischen Rechnungen und durch die Experimente dargestellten physikalischen Sachverhaltes.

2. Grundlagen

2.1. Grundgleichung

Den Ausgangspunkt für die Ermittlung des Elektronentransportes bildet die Boltzmann-Gleichung:

* Dissertation D5, Bonn 1975.

** Eingang der 1. Fassung 15. Januar 1976.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. K. G. Müller, Fachbereich Physik, Universität Essen-Gesamthochschule, Postfach 6843, Unionstr. 2, D-4300 Essen 1.



$$\frac{d}{d\varepsilon} \varepsilon \left\{ \left(\frac{(eE/N)^2}{3 \Sigma q} + 2 \frac{m}{M} \varepsilon q_M k T \right) \frac{df^0}{d\varepsilon} + 2 \frac{m}{M} \varepsilon q_M f^0 \right\} + \sum_{x=AN, ION} [(\varepsilon + \varepsilon_x) q(\varepsilon + \varepsilon_x) f^0(\varepsilon + \varepsilon_x) - \varepsilon q_x f^0] = 0 \quad (1)$$

mit den üblichen Annahmen für das nichtthermische Plasma:

Schwache Anisotropie der EGV: $f = f^0 + f^1 \cos \vartheta$; vernachlässigbar geringer Ionisationsgrad: $n/N = 0$; kleines Massenverhältnis: $m/M \ll 1$; isotrope Streuung der inelastisch gestoßenen Elektronen; vernachlässigbarer Einfluß der bei der Ionisation neu erzeugten Elektronen auf die EGV.

Aus der Normierung von f^0 ergibt sich die Elektronendichte:

$$n = 2 \pi (2/m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f^0 d\varepsilon. \quad (2)$$

Es bedeuten:

f, f^0, f^1	EGV, isotroper Anteil, erste Anisotropie der EGV;
$\varepsilon, \varepsilon_x$	kinetische Energie, inelastischer Energieverlust ($x = AN$: Anregung, $x = ION$: Ionisation);
ϑ	Winkel zwischen der Elektronengeschwindigkeit und dem elektrischen Feld;
q_M	Impulstransportquerschnitt für den elastischen Stoß;
q_x	totale inelastische Querschnitte;
Σq	$\Sigma q = q_M + \Sigma q_x$;
k	Boltzmann-Faktor;
E	elektrische Feldstärke;
m, n, T_e, e	Masse, Dichte, Temperatur, Ladung der Elektronen;
M, N, T	Masse, Dichte, Temperatur der Neutralteilchen.

Mit Hilfe der EGV werden wir die folgenden wichtigen Transportgrößen der Elektronen bestimmen:

mittlere Energie:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{2 \pi}{n} \left(\frac{2}{m} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f^0 d\varepsilon, \quad (3)$$

charakteristische Energie:

$$e D/b = - \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} f^0 d\varepsilon / \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} \frac{df^0}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (4)$$

Beweglichkeit (bezogen auf den Druck p):

$$b/p = - \frac{8 \pi e p}{3 n m^2 N} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} \frac{df^0}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (5)$$

Diffusionskoeffizient (bezogen auf den Druck p):

$$D/p = \frac{8 \pi p}{3 n m^2 N} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} f^0 d\varepsilon, \quad (6)$$

Anregungskoeffizient (Zahl der Anregungen je Driftweg, bezogen auf den Druck p):

$$\Theta/p = - \frac{3 N^2}{e E p} \int_0^\infty \varepsilon q_{AN} f^0 d\varepsilon / \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} \frac{df^0}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (7)$$

Ionisierungskoeffizient (Zahl der Ionisation je Driftweg, bezogen auf den Druck p):

$$\alpha/p = - \frac{3 N^2}{e E p} \int_0^\infty \varepsilon q_{ION} f^0 d\varepsilon / \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{q_M} \frac{df^0}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (8)$$

2.2. Querschnitte

Die für die Rechnungen notwendigen Querschnitte liegen zum Teil widersprüchlich und lückenhaft vor. In Testläufen zu den numerischen Rechnungen haben wir einen konsistenten Datensatz entwickelt, der die vorliegenden Messungen der Transportgrößen optimal reproduziert (siehe Tabelle 1). Für das analytische Modell konnten wir den Impulstransportquerschnitt q_M durch eine Potenzfunktion darstellen:

$$q_M = q_0 \varepsilon^\alpha. \quad (9)$$

2.3. Numerische Integration

Zur Ermittlung der EGV integrieren wir die Boltzmann-Gleichung [Gl. (1)] numerisch. Als inelastische Prozesse berücksichtigen wir die Anregung und die Ionisation der Neutralteilchen. Dabei nehmen wir an, daß die Elektronen beim inelastischen Stoß einen festen Energiebetrag, der gleich der Anregungs- bzw. Ionisationsenergie der Neutralteilchen ist, verlieren. Beim elastischen Stoß berücksichtigen wir die Eigenenergie der Neutralteilchen. Diese macht sich zwar nur bei kleinen Feldstärken ($E/p < 0,1$ V/cm Torr) bemerkbar, bewirkt aber hier wegen einer geringeren Energieabgabe eine höhere Elektronentemperatur.

Wir beginnen die Integration bei einer hohen Energie $\varepsilon_{\text{Start}}$ mit der Anfangsbedingung $f^0(\varepsilon_{\text{Start}})$

Tab. 1. Elektronenstoßquerschnitt der Edelgase.

Gas	Querschnitte	verwendeter Bereich
He	QM Frost, Phelps ²²	—
	QM Crompton, Elford, Jory ^{1a}	—
	QM Crompton, Elford, Robertson ^{2d}	—
	QM Lowke, Phelps, Irwin ²⁰	0.01–100 eV
	QAN Schaper, Scheibner ²³	19.8–24.6 eV
	QION Rapp, Englander-Golden ^{1d}	24.6–100 eV
Ne	QM Thomas ⁸	—
	QM Gilardini, Brown ^{2c}	—
	QM Hoffmann, Skarsgard ^{2b}	0.46–1 eV
	QM Barbieri ²¹	1–16 eV
	QM diese Arbeit	$\varepsilon \geq 16$ eV; Abfall mit $\varepsilon^{-0.17}$
	QAN Schaper, Scheibner ²³	16.6–21.5 eV
	QION Rapp, Englander-Golden ^{1d}	21.5–100 eV
Ar	QM Barbieri ²¹	—
	QM Frost, Phelps ²²	0.01–5 eV
	QM Fletcher, Burch ¹⁵	$\varepsilon \geq 5$ eV
	QAN Schaper, Scheibner ²³	11.5–15.8 eV
	QION Rapp, Englander-Golden ^{1d}	15.8–100 eV
Kr/	QM Braglia ^{1e}	—
Xe	QM Hoffmann, Skarsgard ^{2b}	—
	QM Frost, Phelps ²¹	0.01–20 eV
	QM Schaper, Scheibner ²³	9.9–14 eV/ 8.3–12.1 eV
	QION Rapp, Englander-Golden ^{1d}	14–100 eV/ 12.1–100 eV

= 0. Die numerischen Ergebnisse werden unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes, wenn $\varepsilon_{\text{Start}}$ größer als der fünf- bis zehnfache Wert der mittleren Elektronenenergie gewählt wird.

2.4. Analytisches Modell

Mit der in der Einleitung beschriebenen Näherung berechnet sich für kleine Feldstärken die elastisch bestimmte EGV zu:

$$f^0 = \frac{\alpha + 1}{\pi \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{n}{v_s^3} \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^{2\alpha+2}\right\}, \quad \alpha > -1 \quad (10)$$

mit der Skalierungsenergie

$$\varepsilon_s = \frac{m}{2} v_s^2 = \left(\frac{e E}{q_0 N} \left(\frac{\alpha + 1}{3}\right)^{1/2}\right)^{1/(\alpha+1)}, \quad (11)$$

wobei α der ε -Exponent des Querschnittes q_M ist [Gleichung (9)]. $\alpha > -1$ garantiert die Existenz des Dichteintegrals [Gleichung (2)].

Im Bereich hoher Feldstärken setzen wir die effektive Anregungsenergie ε_{eff} als Potenzfunktion an:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_0 (E/p)^\beta. \quad (12)$$

Die Vorstellung des effektiven inelastischen Niveaus läßt sich in die Boltzmann-Gleichung [Gl. (1)] in der Form:

$$\sum_x [(\varepsilon + \varepsilon_x) q_x(\varepsilon + \varepsilon_x) f^0(\varepsilon + \varepsilon_x) - \varepsilon q_x f^0] = \frac{m^2 n}{8 \pi N} \nu_{\text{AN}} [\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\text{eff}}) - \delta(\varepsilon)] \quad (13)$$

eingeführen. Die Anregungsrate ν_{AN} bestimmt sich bei Vorgabe von ε_{eff} aus der Normierung [Gleichung (2)]. Diese Näherung führt zur inelastisch bestimmten EGV:

$$f^0 = \frac{3(2\alpha+3)}{8\pi\alpha} \frac{n}{v_s^3} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^\alpha\right), \quad \alpha > -1.5, \quad \alpha \neq 0. \quad (14)$$

$\alpha > -1.5$ garantiert die Existenz des Dichteintegrals [Gleichung (2)]. Im Bereich hoher Feldstärken haben wir mit negativen Werten von α zugelassen, daß f^0 für $\varepsilon = 0$ divergiert. Die Divergenz ergibt sich aus der Näherung, daß ein Elektron nach jedem inelastischen Stoß mit der Geschwindigkeit Null neu startet. Sie liefert keinen Beitrag zu den uns interessierenden Transportgrößen.

Zur Skalierung der Elektronenenergie verwenden wir die effektive Anregungsenergie:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} m v_s^2 = \varepsilon_{\text{eff}}. \quad (15)$$

2.5. Transportgrößen

Für die Elektronengeschwindigkeitsverteilung [Gl. (10), Gl. (14)] des analytischen Modells ergeben sich die Transportgrößen [Gl. (3) – (8)]:

$$\Phi = a \Phi_s \sim (E/p)^k. \quad (16)$$

Der Zahlenfaktor a , die Skalierungsgröße Φ_s und die Feldstärkepotenz k sind in Tab. 2 aufgeführt. Die Skalierungsgröße Φ_s liefert eine gute Abschätzung für die Transportgröße Φ als Funktion der Feldstärke. So wird der Einfluß des Verlaufes des Impulstransportquerschnittes als Funktion der Energie auf die Transportgrößen transparent.

3. Ergebnisse und Diskussion

3.1. Anpassung der Parameter des analytischen Modells

Die Stoßprozesse der Elektronen gehen in das analytische Modell über die Parameter q_0 , α [Gl. (9)] und ε_0 , β [Gl. (12)] für die Potenzabhängigkeit des elastischen Querschnittes bzw. der effektiven

Tab. 2. Skalierung und Feldstärkeabhängigkeit der Transportgrößen; ν_s : Stoßfrequenz für Impulstransportstöße bei der Energie ε_s ; Φ_s : s. Gl. (16); ε_s : s. Gln. (11), (15); α, β : s. Gln. (9), (12).

Transportgröße Φ	Skalierungsgröße Φ_s	Elastisch bestimmte EGV		Inelastisch bestimmte EGV	
		skalierte Transportgröße $a = \Phi/\Phi_s$	Feldstärkepotenz k	skalierte Transportgröße $a = \Phi/\Phi_s$	Feldstärkepotenz k
$\langle \varepsilon \rangle$	ε_s	$\frac{\Gamma\left(\frac{5/4}{1+\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3/4}{1+\alpha}\right)}$	$\frac{1}{1+\alpha}$	$\frac{3(3+2\alpha)}{5(5+2\alpha)}$	β
$e D/b$	ε_s	$\frac{1}{2+2\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2+2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2+2\alpha}\right)}$	$\frac{1}{1+\alpha}$	$\frac{1}{4-2\alpha}$	β
$b p$	$\frac{e}{m \nu_s/p}$	$\frac{4(1+\alpha)}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2+2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3/4}{1+\alpha}\right)}$	$-\frac{1+2\alpha}{2+2\alpha}$	$\frac{3+2\alpha}{2}$	$-\beta(\frac{1}{2}+\alpha)$
$D p$	$\frac{\varepsilon_s}{m \nu_s/p}$	$\frac{2}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2+2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3/4}{1+\alpha}\right)}$	$\frac{1-2\alpha}{2+2\alpha}$	$\frac{3+2\alpha}{4(2-\alpha)}$	$\beta(\frac{1}{2}-\alpha)$
Θ/p	$\frac{e E/p}{\varepsilon_s}$	—	—	1	$1-\beta$

Tab. 3. Modellbeschreibung der Impulstransportquerschnitte [q_0, α : Gl. (9)] und der effektiven Anregungsenergien [ε_0, β : Gleichung (12)]. Zum Vergleich sind die Werte $\varepsilon_{\text{eff}}(10)$, $\varepsilon_{\text{eff}}(100)$ für die Feldstärken $E/p=10, 100$ V/cm Torr und die Anregungsenergie ε_{AN} aufgeführt. Bei Helium wird die obere Darstellung des Impulstransportquerschnittes für die elastisch bestimmte EGV, die untere für die inelastisch bestimmte EGV unseres Modells verwendet.

Gas		Impulstransportquerschnitt		Inelastischer Energieverlust				
		q_0 [cm ² /eV ²]	α	ε_{AN} [eV]	E/p [V/cm Torr]		ε_0 [eV (V/cm Torr) ^{-β]}	β
					10	100		
He	(elast. EGV)	6,5 E-16	0	—	—	—	—	—
	(inelast. EGV)	12,9 E-16	−0,5	19,8	29,17	61,59	13,82	0,3245
	Ne	1,34 E-16	0,2374	16,6	25,54	41,38	15,76	0,2096
	Ar	1,08 E-16	1,234	11,5	12,11	15,22	9,63	0,0994
	Kr	1,1 E-16	1,360	9,9	11,39	14,90	8,71	0,1166
	Xe	4,27 E-16	1,209	8,3	9,02	10,78	7,54	0,0776

Anregungsenergie ein. Wir bestimmen diese offenen Parameter durch Anpassung der Ergebnisse des Modells an die Experimente bzw. an die numerischen Rechnungen und erhalten die Daten der Tabelle 3. Im Falle von Helium verwenden wir für die elastisch und die inelastisch bestimmte EGV zwei unterschiedliche Potenzdarstellungen des Impulstransportquerschnittes.

3.2. Elektronengeschwindigkeitsverteilung

Das Ziel der Arbeit ist die Bestimmung der Transportgrößen, die Ermittlung der EGV interessiert uns nur sekundär. So haben wir bei der Entwicklung des Modells wenig Wert auf eine realistische EGV gelegt. Ein Vergleich der EGV's des Modells mit dem der numerischen Rechnung (Abb. 1) zeigt, daß

das Modell im elastisch bestimmten Bereich realistische Verteilungen liefert. Die abgeschnittenen Verteilungen im inelastisch bestimmten Bereich können jedoch nur als grobe Näherung betrachtet werden.

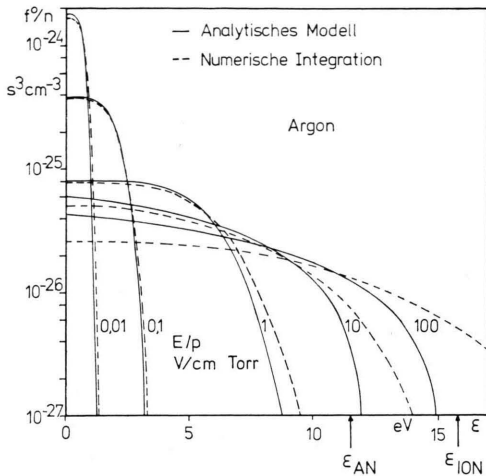


Abb. 1. Berechnete Elektronengeschwindigkeitsverteilung f^0/n in Argon als Funktion der Energie ε für verschiedene Feldstärken E/p ; n : Elektronendichte.

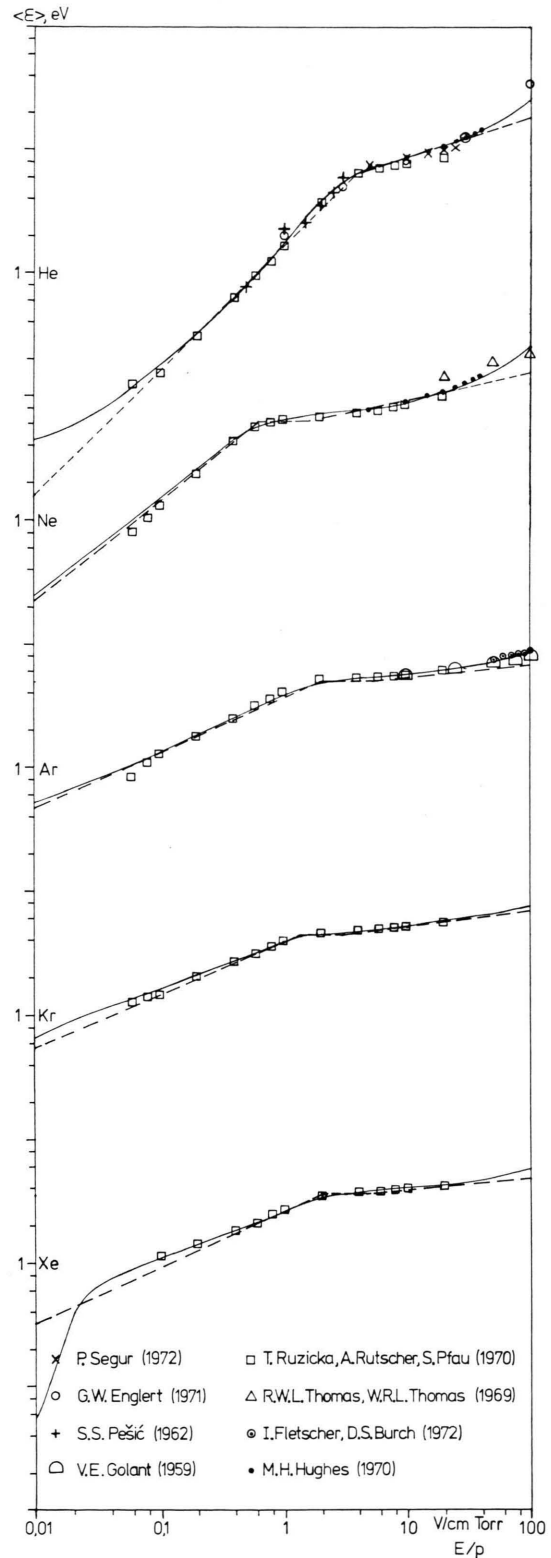
3.3. Transportgrößen

Unsere numerische Berechnung des Elektronentransportes liefert den Verlauf der Transportgrößen im Feldstärkebereich von $E/p = 0,01 - 100$ V/cm Torr (Abb. 2 a – e, ausgezogene Kurven). Ein Vergleich mit den Rechnungen von Pfau, Rutscher¹⁷ zeigt bei der charakteristischen Energie und beim Diffusionskoeffizienten größere Abweichungen. Diese beruhen auf der groben Approximation des elastischen Querschnittes und der vereinfachten Darstellung der inelastischen Prozesse durch diese Autoren. Die genaueren Rechnungen von Hughes¹⁷ in Helium und Neon dagegen, die allerdings nur einen kleinen Feldstärkebereich erfassen ($E/p = 3 - 40$ V/cm Torr), bestätigen unsere Ergebnisse ebenso wie die vorliegenden experimentellen Werte. Darüber hinaus liefern unsere Rechnungen die experimentell wenig untersuchten Größen des Diffusions- und des Anregungskoeffizienten.

Die Ergebnisse des analytischen Modells (gestrichelte Kurven der Abb. 2 a – e) geben erstaunlich

Abb. 2. Transportgrößen der Elektronen in den Edelgasen als Funktion der reduzierten Feldstärke E/p . —: Numerische Integration; ---: analytisches Modell.

Abb. 2 a. Mittlere Energie $\langle \varepsilon \rangle$.



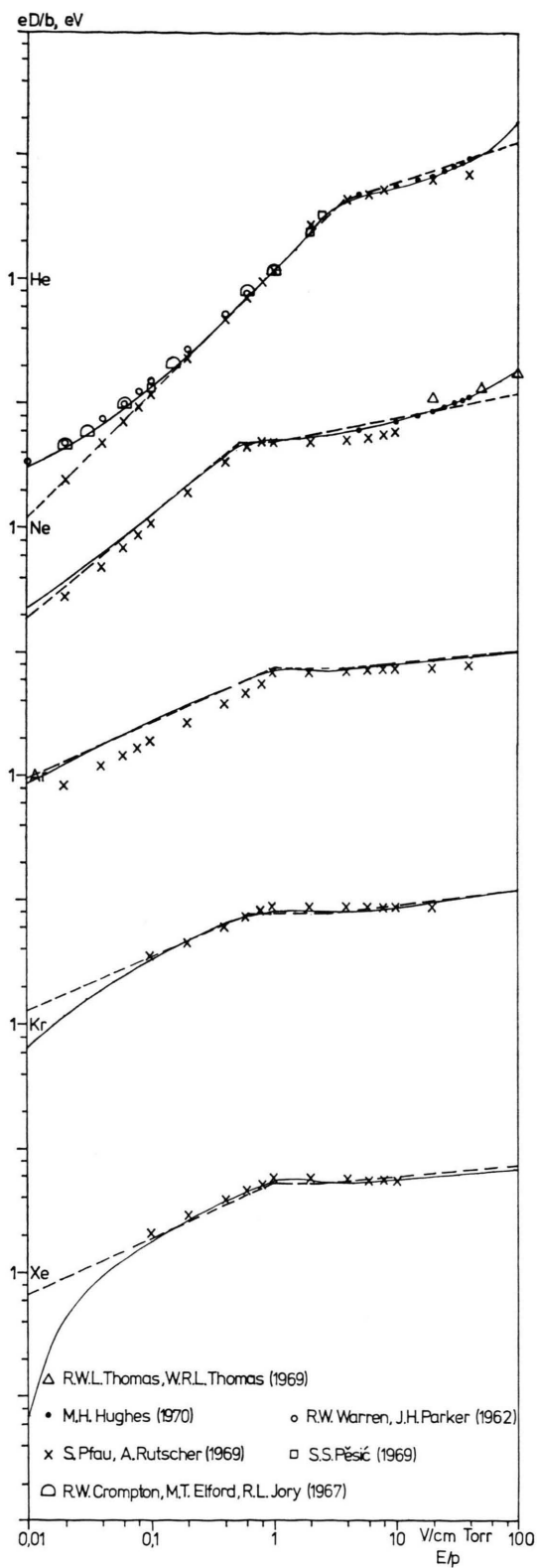


Abb. 2 b. Charakteristische Energie eD/b .

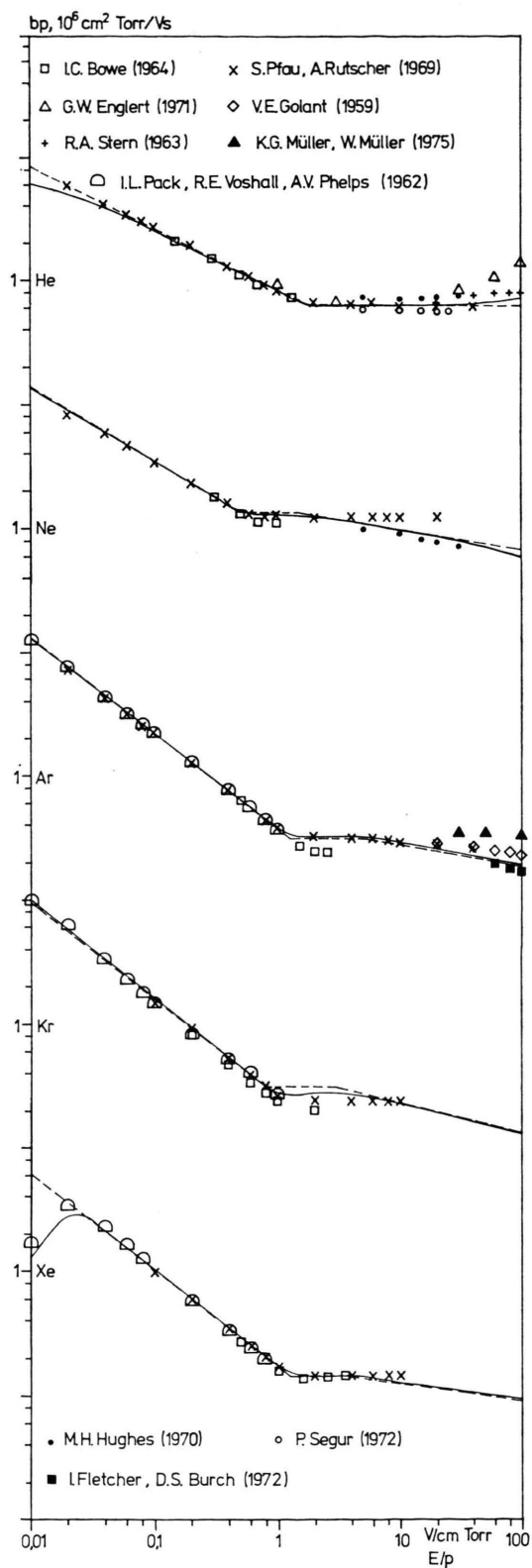


Abb. 2 c. Beweglichkeit $b p$.

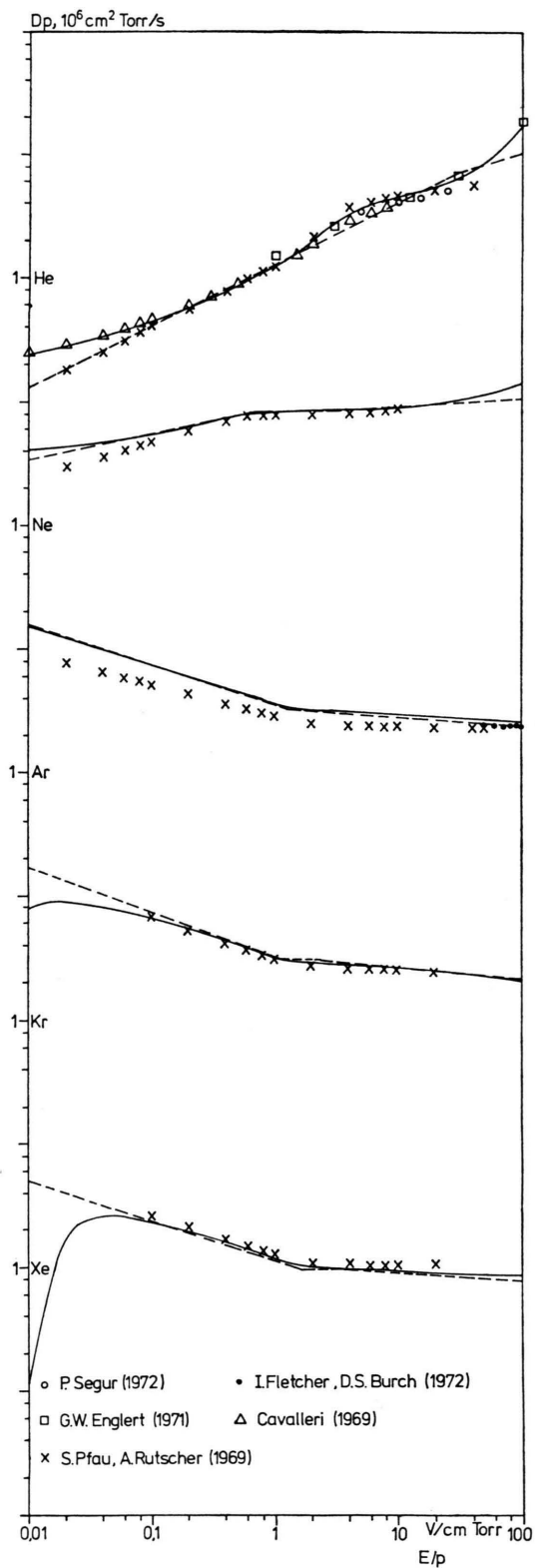


Abb. 2 d. Diffusionskoeffizient D_p .

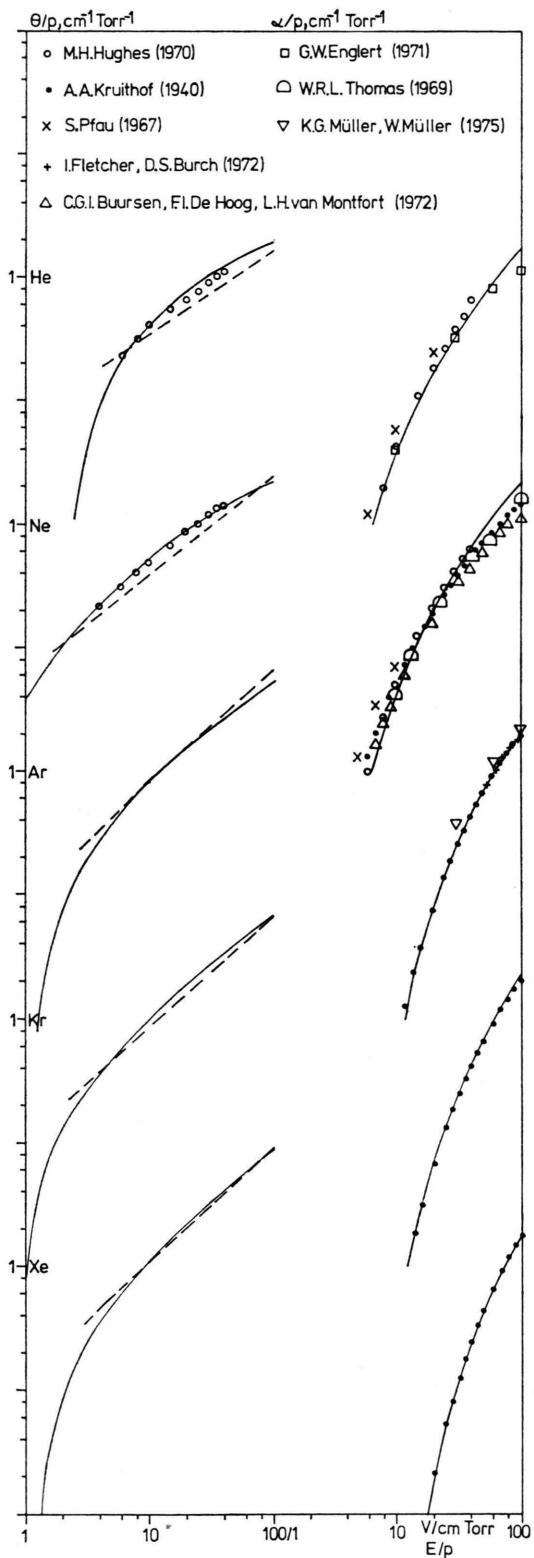


Abb. 2 e. Anregungskoeffizient Θ/p und Ionisierungskoeffizient α/p .

$E; p \left[\frac{\text{V}}{\text{cm Torr}} \right]$	He	Ne	Ar	Kr	Xe
0,01	$3,9 \cdot 10^{-10}$	$3,9 \cdot 10^{-10}$	$5,7 \cdot 10^{-10}$	$4,6 \cdot 10^{-10}$	$7,0 \cdot 10^{-11}$
0,03	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$
0,1	$7,4 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$
0,3	$5,2 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$6,8 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$
1	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
3	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$
10	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
30	$9,6 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
100	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$

Tab. 4. Kritischer Ionisationsgrad $(n/N)_{\text{crit},0}$ in Abhängigkeit von der reduzierten Feldstärke E/p bei einem Referenzdruck von 1 Torr.

gut den Verlauf der Transportgrößen wieder. Dies weist darauf hin, daß die einfachen Vorstellungen des Modells, die wesentlichen Mechanismen des Elektronentransportes wiedergeben.

Wir können den Feldstärkebereich von $E/p = 0,01 \text{ V/cm Torr} - 100 \text{ V/cm Torr}$ nach dem Energieverlust in drei Bereiche aufteilen: den Bereich der elastisch bestimmten EGV, den Bereich der inelastisch bestimmten EGV mit konstantem Energieverlust und den Bereich der inelastisch bestimmten EGV mit variablem Energieverlust. Zwischen diesen Modellbereichen existieren Übergangsbereiche, in denen sich die Transportgrößen durch Extrapolation darstellen lassen.

Bei sehr kleinen Feldstärken weichen die Ergebnisse unseres Modells von der numerischen Berechnung ab. Diese Abweichung macht sich besonders bei Helium und Xenon bemerkbar. Im Falle von Helium fällt die thermische Energie der Neutralteilchen ins Gewicht. Sie liegt bei 0,035 eV, während die mittlere Elektronenenergie für $E/p = 0,01 \text{ V/cm Torr}$ bei 0,04 eV liegt (numerische Rechnung). Bei diesen niedrigen Elektronenenergien kann das Neutralgas nicht länger als ruhend angenommen werden. Daher erhalten wir in unserem Modell einen zu niedrigen Wert für Elektronenenergie. Im Falle von Xenon liefert unser Modell bei kleinen Feldstärken zu große Werte für die Transportgrößen. Dies erklärt sich dadurch, daß die Approximation des Impulstransportquerschnittes auf den Bereich 1–10 eV angepaßt ist und hier bei kleinen Energien unbrauchbar wird.

3.4. Anwendungen

Eine wesentliche Voraussetzung ist die Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung. Mit zunehmendem Ionisationsgrad gewinnen die Elektron-Elektron-Stöße an Bedeutung; anstelle der von uns

berechneten Verteilungsfunktion stellen sich Maxwell-Verteilungen ein. Die Elektron-Elektron-Stöße können vernachlässigt werden, wenn die zugehörige Stoßfrequenz ν_{ee} (Shkarofsky²⁵) klein ist gegenüber der Frequenz, die den Energietransport durch elastische Stöße (Index: M) und inelastische Stöße (Indizes: AN, ION) erfaßt*.

$$\frac{\nu_{ee}}{p} \ll \frac{2m}{M} \frac{\nu_M}{p} + \frac{\nu_{AN}}{p} \frac{\epsilon_{AN}}{\langle \epsilon \rangle} + \frac{\nu_{ION}}{p} \frac{\epsilon_{ION}}{\langle \epsilon \rangle}. \quad (17)$$

Bei der Auswertung dieser Bedingung setzen wir für die einzelnen Frequenzen Mittelwerte ein, die sich auf die von uns berechneten Transportgrößen zurückführen lassen:

$$\frac{\nu_M}{p} = \frac{e}{m b p}$$

Stoßfrequenz für den Impulstransport bedingt durch elastische Stöße Elektron – Atom;

$$\frac{\nu_{AN}}{p} = \frac{\Theta}{p} b p \frac{E}{p}$$

Stoßfrequenz für anregende Stöße;

$$\frac{\nu_{ION}}{p} = \frac{a}{p} b p \frac{E}{p}$$

Stoßfrequenz für ionisierende Stöße.

Gleichsetzen der beiden Seiten der Bedingung (17) liefert einen kritischen Wert $(n/N)_{\text{crit}}$ des Ionisationsgrades als Funktion der Feldstärke E/p , wobei über den Coulomb-Logarithmus $\ln A$ noch eine schwache Abhängigkeit von der Elektronendichte n und damit vom Druck p zustande kommt:

$$(n/N)_{\text{crit}} = (n/N)_{\text{crit},0} \quad (18)$$

$$\times \frac{\ln A_0}{\ln A_0 - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{p_0} \left(\frac{n}{N} \right)_{\text{crit}} \left/ \left(\frac{n}{N} \right)_{\text{crit},0} \right.}.$$

* Die rechte Seite läßt sich auch ersetzen durch den Ausdruck $e(b p) (E/p)^2 / \langle \epsilon \rangle$, der die mittlere Energieaufnahme eines Elektrons je Zeiteinheit, dividiert durch die mittlere Energie, darstellt und als Energieaufnahme-frequenz ν_E bezeichnet werden kann. Die Abschätzung des Einflusses der Coulomb-Stöße bei Winkler und Wilhelm¹⁸ basiert auf einem Vergleich von ν_{ee} und ν_E .

Der Index 0 bezieht sich auf einen Referenzdruck p_0 , den wir zu 1 Torr gewählt haben. Die Werte für $(n/N)_{\text{crit},0}$ und $\ln A_0$ sind in den Tab. 4 und 5 aufgeführt. Für einen beliebigen Druck p ergibt sich der kritische Ionisationsgrad $(n/N)_{\text{crit}}$ aus Gl. (18) über eine einfache Iteration.

Tab. 5. Coulomb-Logarithmus $\ln A_0$ in Abhängigkeit von der reduzierten Feldstärke E/p bei einem Referenzdruck von 1 Torr.

E/p [$\frac{\text{V}}{\text{cm Torr}}$]	He	Ne	Ar	Kr	Xe
0,01	9,93	12,6	13,5	13,9	11,1
0,03	10,2	12,9	13,4	13,8	13,4
0,1	10,6	13,2	13,3	13,6	13,3
0,3	11,1	13,6	13,2	13,5	13,2
1	11,7	13,4	13,2	13,4	13,1
3	12,4	12,4	12,6	12,6	12,6
10	11,7	11,5	11,6	11,6	11,5
30	11,0	11,0	10,8	10,8	10,7
100	10,9	10,8	10,0	10,0	9,8

Eine wichtige Anwendung unserer Rechnungen ist der Elektronentransport in einer positiven Säule. Die Vernachlässigung der Coulomb-Stöße beschränkt den Anwendungsbereich auf die stromschwache Niederdruck- und Freifallsäule mit E/p -Werten oberhalb von ungefähr 1 V/cm Torr.

Der obere von uns behandelte E/p -Bereich umfaßt auch die bei der Zündung von selbständigen Entladungen vorliegenden Feldstärkewerte.

Die Rechnungen für $E/p < 1$ V/cm Torr finden Anwendung auf fremderregte Plasmen geringer Dichte. Hier werden die Ladungsträger nicht durch die Elektronen der untersuchten Verteilung erzeugt. Dies ist gegeben bei der Trägererzeugung durch Elektronenstrahlen oder Photonen oder bei einer Trägererzeugung außerhalb des betrachteten Volumens.

Wir danken dem Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit. Die Rechnungen wurden ausgeführt auf der IBM 370/168 der Universität Bonn.

- ¹ P. Laborie, J.-M. Rocard, and J. A. Rees, *Electronic Cross-sections, Macroscopic Coefficients*, Dunod, Paris 1968: a) 92, 96, 98 [R. W. Crompton, M. T. Elford, R. L. Jory (1967)]; b) 162, 177, 195 [J. L. Pack, R. E. Voshall, A. V. Phelps (1962)]; c) 130, 164, 178, 196 [A. A. Kruithof (1940)]; d) 89, 124, 159, 174, 192 [D. Rapp, P. Englander-Golden (1965)]; e) 175, 193 [G. L. Braglia (1965)].
- ² A. Gilardini, *Low Energy Electron Collisions in Gases*, John Wiley Sons, New York-London-Sydney-Toronto 1972: a) 320 [Cavalleri (1969)]; b) 335, 352, 357 [Hoffmann, Skarsgard (1959)]; c) 335 [Gilardini, Brown (1957)]; d) 327 [Crompton, Elford, Robertson (1970)].
- ³ R. W. Warren and J. H. Parker, *Phys. Rev.* **128**, 2661 [1962].
- ⁴ J. C. Bowe, *Phys. Rev.* **134**, A 355 [1964].
- ⁵ R. A. Stern, *Phen. Ion. Gases* **331**, Paris 1963.
- ⁶ S. Pfau, *Beitr. Plasmaphys.* **7**, 57 [1967].
- ⁷ C. G. J. Buursen, F. J. De Hoog, and L. H. Van Montfort, *Physica* **60**, 244 [1972].
- ⁸ W. R. L. Thomas, *J. Phys. B, Ser. 2, Vol. 2*, 551 [1969].
- ⁹ P. Segur, 2nd Int. Conf. Gas Discharges, p. 156, London 1972.
- ¹⁰ G. W. Englert, *Z. Naturforsch.* **26a**, 836 [1971].

- ¹¹ S. S. Pesić, *Phen. Ion. Gases*, p. 365, Bukarest 1969.
- ¹² V. E. Golant, *Sov. Phys. Techn. Phys.* **4**, 680 [1959].
- ¹³ T. Ruzicka, A. Rutscher, and S. Pfau, *Ann. Phys.* **7**, 124 [1970].
- ¹⁴ R. W. L. Thomas and W. R. L. Thomas, *J. Phys. B, Ser. 2, Vol. 2*, 562 [1969].
- ¹⁵ J. Fletscher and D. S. Burch, *J. Phys. D* **5**, 2037 [1972].
- ¹⁶ M. H. Hughes, *J. Phys. B* **3**, 1544 [1970].
- ¹⁷ S. Pfau and A. Rutscher, *Ann. Phys.* **7**, 166 [1969].
- ¹⁸ R. Winkler and J. Wilhelm, *Beitr. Plasmaphys.* **11**, 159 [1971].
- ¹⁹ K. G. Müller and W. Müller, *Z. Naturforsch.* **30a**, 1553 [1975].
- ²⁰ J. J. Lowke, A. V. Phelps, and B. W. Irwin, *Westinghouse Res. Lab., Report: 73-1V8-ARCPL-P1* [1973].
- ²¹ D. Barbiere, *Phys. Rev.* **84**, 653 [1951].
- ²² L. S. Frost and A. V. Phelps, *Phys. Rev.* **136**, A 1538 [1964].
- ²³ M. Schaper and H. Scheibner, *Beitr. Plasmaphys.* **9**, 45 [1969].
- ²⁴ H. Maier-Leibnitz, *Z. Physik* **95**, 499 [1935].
- ²⁵ I. P. Shkarofsky, I. W. Johnston, and M. P. Bachynsky, *The Particle Kinetics of Plasma*, Addison-Wesley Publ., Dordrecht 1966, p. 334.